模块二 随机事件的概率、事件的独立性（★★☆）

强化训练

1．（2022•汉中模拟•★★）对于事件 A，B，下列命题不正确的是（　　）

（A）若 A，B 互斥，则 $P(A)+P(B)\le 1$

（B）若 A，B 对立，则 $P(A)+P(B)=1$

（C）若 A，B 独立，则 $P(\bar{A})P(\bar{B})=P(\bar{A}\bar{B})$

（D）若 A，B 独立，则 $P(A)+P(B)\le 1$

答案：D

解析：A 项，若 A，B 互斥，则 $P(A)+P(B)=P(A\cup B)\le 1$，故 A 项正确；

B 项，若 A，B 对立，则由内容提要第 3 点④的公式可得 $P(A)+P(B)=1$，故 B 项正确；

C 项，若 A，B 独立，则 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也独立，所以 $P(\bar{A})P(\bar{B})=P(\bar{A}\bar{B})$，故 C 项正确；

D 项，若 A，B 独立，则 $P(A)+P(B)\le 1$不一定成立. 例如，连续掷两次骰子，记事件 A 为第一次掷出的点数大于 1，事件 B 为第二次掷出的点数大于 1，两次试验结果显然互不影响，所以满足 A，B 独立，但 $P(A)+P(B)=\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=\frac{5}{3}>1$，故 D 项错误.

2．（2023•天水模拟•★★）从 2，3，4，9 中任取两个不同的数，分别记为 a，b，则 $\log_a b=2$ 的概率为（　　）

（A）$\frac{1}{12}$　　（B）$\frac{1}{6}$　　（C）$\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{2}{3}$

答案：B

解析：4 个中取 2 个，样本点个数不多，直接罗列，

由题意，样本空间 $\Omega=\{(2,3),(2,4),(2,9),(3,4),(3,9),(4,9),(3,2),(4,2),(9,2),(4,3),(9,3),(9,4)\}$，

其中满足 $\log_a b=2$ 的样本点是 $(2,4)$，$(3,9)$，故所求概率 $P=\frac{2}{n(\Omega)}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

3．（2023•重庆一模•★★）某人有 1990 年北京亚运会吉祥物“盼盼”，2008 年北京奥运会吉祥物“贝贝”、“晶晶”、“欢欢”、“迎迎”、“妮妮”，2010 年广州亚运会吉祥物“阿祥”、“阿和”、“阿如”、“阿意”、“乐羊羊”，2022 年北京冬奥会吉祥物“冰墩墩”，2022 年杭州亚运会吉祥物“琮琮”、“莲莲”、“宸宸”，若他从这 15 个吉祥物中随机取出两个，这两个吉祥物都是来自在北京举办的运动会的概率是（　　）

（A）$\frac{1}{10}$　　（B）$\frac{1}{5}$　　（C）$\frac{2}{5}$　　（D）$\frac{2}{3}$

答案：B

解析：15 个中取 2 个，样本点个数较多，故用排列组合方法计算，

记两个吉祥物都是来自在北京举办的运动会为事件 A，由题意，$n(\Omega)=C_{15}^2=105$，

这 15 个吉祥物中北京有 7 个，所以 $n(A)=\mathrm{C}_7^2=21$，故 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{21}{105}=\dfrac{1}{5}$.

4.（2023·绵阳二诊·★★★）寒假来临，秀秀将从《西游记》、《童年》、《巴黎圣母院》、《战争与和平》、《三国演义》、《水浒传》这六部著作中选四部（其中国外两部，国内两部），每周看一部，连续四周看完，则《三国演义》与《水浒传》被选中且在相邻两周看完的概率为（　　）

（A）$\dfrac{1}{12}$　　（B）$\dfrac{1}{6}$　　（C）$\dfrac{1}{3}$　　（D）$\dfrac{2}{3}$

答案：B

解析：样本点个数较多，罗列困难，故用排列组合方法计算，先求 $n(\Omega)$，

记让求概率的事件为 A，因为六部著作中国内国外各有三部，所以选出著作的方法有 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_3^2$ 种，

选出书后，还要安排看书的顺序，有 A_4^4 种排法，所以 $n(\Omega)=\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_3^2\mathrm{A}_4^4=216$，

若《三国演义》与《水浒传》被选中，则只需再从三部外国著作选 2 部，有 C_3^2 种选法，

选好后，再安排看的顺序，《三国演义》与《水浒传》要在相邻两周看完，用捆绑法，

将《三国演义》与《水浒传》捆绑，并与另外两部外国著作一起排序，有 $\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^3$ 种排法，

由分步乘法计数原理，$n(A)=\mathrm{C}_3^2\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^3=36$，所以 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{36}{216}=\dfrac{1}{6}$.

5.（2023·成都模拟·★★）口袋中装有编号为①、②的 2 个红球和编号为①、②、③、④、⑤的 5 个黑球，小球除颜色、编号外，形状、大小完全相同. 现从中取出 1 个小球，记事件 A 为“取到的小球的编号为②”，事件 B 为“取到的小球是黑球”，则下列说法正确的是（　　）

（A）A 与 B 互斥　　（B）A 与 B 对立　　（C）$P(A\cap B)=\dfrac{6}{7}$　　（D）$P(A\cup B)=\dfrac{6}{7}$

答案：D

解析：样本点总数不多，可直接罗列来看，记 2 个红球分别为 r_1,r_2，5 个黑球分别为 k_1,k_2,k_3,k_4,k_5，

则样本空间 $\Omega=\{r_1,r_2,k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\}$，$A=\{r_2,k_2\}$，$B=\{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\}$，

所以 $A\cap B=\{k_2\}\neq\varnothing$，从而 A 与 B 不互斥，也不对立，故 A 项、B 项错误；

再看 C、D 两项，涉及的概率为古典概型，故只需计算 $A\cap B$ 和 $A\cup B$ 包含的样本点个数即可，

因为 $n(A\cap B)=1$，$n(\Omega)=7$，所以 $P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{7}$，故 C 项错误；

又 $A\cup B=\{r_2,k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\}$，所以 $P(A\cup B)=\dfrac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{7}$，故 D 项正确.

6.（2023·吉林模拟·★★）掷一颗质地均匀的骰子，记随机事件 $A_i=$“向上的点数为 i”，其中 $i=1,2,3,4,5,6$，$B=$“向上的点数为奇数”，则下列说法正确的是（　　）

（A）$\overline{A_1}$ 与 B 互斥　　（B）$A_2+B=\Omega$　　（C）A_3 与 $\overline{B}$ 相互独立　　（D）$A_4\cap B=\varnothing$

答案：D

解析：样本空间的样本点个数不多，可通过罗列来判断选项，由题意，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$， A 项，$A_1=\{1\}\Rightarrow\overline{A}_1=\{2,3,4,5,6\}$，又 $B=\{1,3,5\}$，所以 $\overline{A}_1\cap B=\{3,5\}\neq\varnothing$，从而 $\overline{A}_1$ 与 B 不互斥，故 A 项错误；

B 项，$A_2=\{2\}$，所以 $A_2+B=A_2\cup B=\{1,2,3,5\}\neq\Omega$，故 B 项错误；

C 项，$A_3=\{3\}$，$\overline{B}=\{2,4,6\}$，所以 $P(A_3)=\dfrac{n(A_3)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{6}$，$P(\overline{B})=\dfrac{n(\overline{B})}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{2}$，

又 $A_3\cap\overline{B}=\varnothing$，所以 $P(A_3\cap\overline{B})=0\neq P(A_3)P(\overline{B})$，从而 A_3 与 $\overline{B}$ 不独立，故 C 项错误；

D 项，$A_4=\{4\}$，所以 $A_4\cap B=\varnothing$，故 D 项正确.

7.（2023・全国模拟・★★★）一个质地均匀的正四面体木块的四个面上分别标有数字 1，2，3，4，连续抛掷这个正四面体木块两次，记录每次朝下的面上的数字，设事件 A 为“两次记录的数字之和为奇数”，事件 B 为“第一次记录的数字为奇数”，事件 C 为“第二次记录的数字为偶数”，则下列结论正确的是（　　）

（A）事件 B 与事件 C 是对立事件　　（B）事件 A 与事件 B 不是相互独立事件

（C）$P(A)P(B)P(C)=\dfrac{1}{8}$　　　　（D）$P(ABC)=\dfrac{1}{8}$

答案：C

解析：连续抛掷两次，每次都有 4 种结果，所以 $n(\Omega)=4\times4=16$，

样本空间中样本点个数较多，罗列较为繁琐，可直接分析 A，B，C，$A\cap B$ 等事件的样本点情况，

由题意，要使两次记录的数字之和为奇数，则必定为一次奇数一次偶数，可先把奇数数字、偶数数字选出来，再排序，所以 $n(A)=\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_2^2=8$，类似的，$n(B)=\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_4^1=8$，$n(C)=\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_2^1=8$，

A 项，当第一次为奇数，第二次为偶数时，B，C 同时发生，所以事件 B 与 C 不是对立事件，故 A 项错误；

B 项，若 $A\cap B$ 发生，则两次数字之和为奇数且第一次为奇数，于是第二次必定为偶数，

所以 $n(A\cap B)=\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_2^1=4$，故 $P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$，又 $P(A)P(B)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}\cdot\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{8}{16}\times\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{4}=P(A\cap B)$，

所以事件 A 与事件 B 是相互独立事件，故 B 项错误；

C 项，$P(A)P(B)P(C)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}\cdot\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}\cdot\dfrac{n(C)}{n(\Omega)}=\dfrac{8}{16}\times\dfrac{8}{16}\times\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{8}$，故 C 项正确；

D 项，事件 A，B，C 同时发生，即第一次为奇数，第二次为偶数，所以 $n(ABC)=\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_2^1=4$，

从而 $P(ABC)=\dfrac{n(ABC)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$，故 D 项错误.

8.（2020・天津卷・★★）已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{3}$，假定两球是否落入盒子互不影响，则甲、乙两球都落入盒子的概率为_____；甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为_____.

答案：$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{2}{3}$

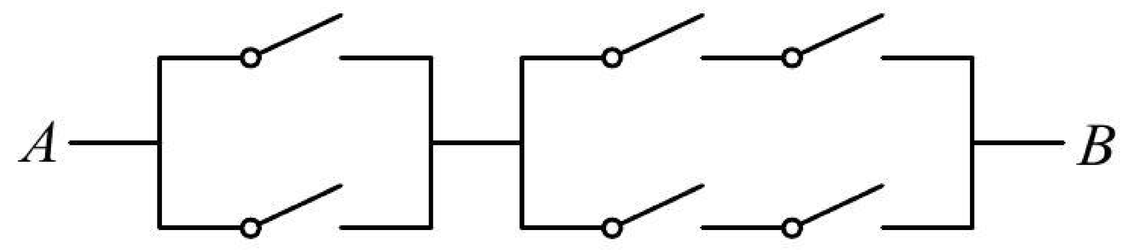
解析：设甲、乙落入盒子分别为事件 A，B，则两球都落入盒子的概率为 $P(AB)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$；

两球至少有一个落入盒子有 $A\overline{B}$，$\overline{A}B$，AB 三种情况，其对立事件只有 $\overline{A}\overline{B}$ 一种情况，故用对立事件求概率，

甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为$1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$.

9.（2022 • 佛山模拟 • ★★★）如图，电路从 A 到 B 上共连接了 6 个开关，每个开关闭合的概率都为$\frac{2}{3}$，若每个开关是否闭合相互之间没有影响，则从 A 到 B 通路的概率是（　　）

（A）$\frac{10}{27}$　　（B）$\frac{100}{243}$　　（C）$\frac{448}{729}$　　（D）$\frac{40}{81}$



答案：C

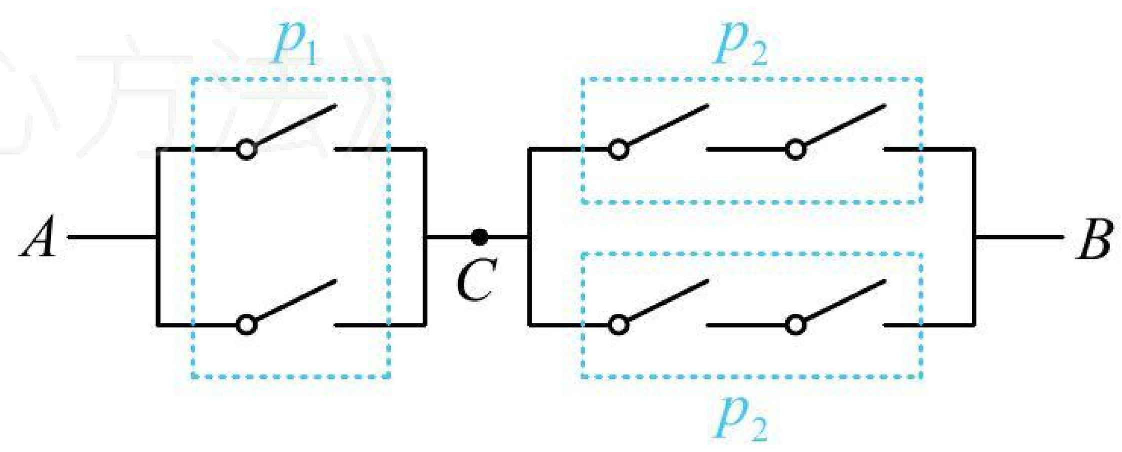
解析：如图，把电路分两部分，先看 A 到 C，两开关应至少闭合 1 个，情况较多，考虑用对立事件求概率，

设从 A 到 C 通路的概率是 p_1，则 $p_1=1-(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{3})=\frac{8}{9}$，

再看从 C 到 B，又分完全相同的上、下两部分，要使从 C 到 B 通路，上、下应至少有一条是通路，仍用对立事件求概率，先计算上、下各自通路的概率，

设从C到B上、下各自通路的概率为 p_2，则 $p_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，所以从$C$到$B$通路的概率为$1-(1-\frac{4}{9})\times(1-\frac{4}{9})=\frac{56}{81}$，

而从 A 到 B 要通路，需 A 到 C，C 到 B 均通路，故所求概率 $P=\frac{8}{9}\times\frac{56}{81}=\frac{448}{729}$.



10.（2023 • 江苏模拟 • ★★★）甲、乙两队进行篮球比赛，采取五场三胜制（先胜三场者获胜，比赛结束），根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“客客主主客”，设甲队主场取胜的概率为 0.5，客场取胜的概率为 0.4，且各场比赛相互独立，则甲队在 0:1 落后的情况下，最终获胜的概率为（　　）

（A）0.24　　（B）0.25　　（C）0.2　　（D）0.3

答案：A

解析：设甲队第二、三、四、五场获胜分别为事件 A_2，A_3，A_4，A_5，甲队最终获胜为事件 A，

要求甲队最终获胜的概率，应先从各局比赛胜负情况考虑，分析有哪些获胜的方式，

甲队获胜的方式有四种：$A_2A_3A_4$，$A_2A_3\overline{A}_4A_5$，$A_2\overline{A}_3A_4A_5$，$\overline{A}_2A_3A_4A_5$，

四种情况彼此互斥，可用加法公式求概率，下面先分别计算概率，计算时需注意主客场的切换，

$P(A_2A_3A_4)=P(A_2)P(A_3)P(A_4)=0.4\times0.5\times0.5=0.1$，

$P(A_2A_3\overline{A}_4A_5)=P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)P(A_5)=0.4\times0.5\times(1-0.5)\times0.4=0.04$，

$P(A_2\overline{A}_3A_4A_5)=P(A_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)P(A_5)=0.4\times(1-0.5)\times0.5\times0.4=0.04$，

$P(\overline{A}_2A_3A_4A_5)=P(\overline{A}_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)=(1-0.4)\times0.5\times0.5\times0.4=0.06$，

所以 $P(A)=P((A_2A_3A_4)\cup(A_2A_3\overline{A}_4A_5)\cup(A_2\overline{A}_3A_4A_5)\cup(\overline{A}_2A_3A_4A_5))$

$=P(A_2A_3A_4)+P(A_2A_3\overline{A}_4A_5)+P(A_2\overline{A}_3A_4A_5)+P(\overline{A}_2A_3A_4A_5)=0.1+0.04+0.04+0.06=0.24$.

11．（2023·全国联考·★★★★）甲、乙两队进行冰壶比赛，约定三局两胜（先胜两局者获胜，比赛结束），每局必须决出胜负，胜者下一局执先手，负者下一局执后手. 已知甲队执先、后手胜乙队的概率分别为 p_1， p_2，且 $0<p_1<p_2<1$，记事件 E，F 分别为甲以第一局执先手、第一局执后手获胜，则（　　）

（A）$P(E)<P(F)$　（B）$P(E)>P(F)$　（C）$P(E)=P(F)$　（D）以上都有可能

答案： A

解析： 先把事件 E，F 的概率用 p_1， p_2 表示，再加以比较，

从各局的胜负情况来看，甲队获胜有三种情况："胜胜"，"胜败胜"，"败胜胜"，

三种情况彼此互斥，可用加法公式求概率，由于每局执先手、后手对获胜的概率有影响，故应分别考虑，

在事件 E 中，甲第一局执先手，所以"胜胜"这种情况具体来说应为"先手胜，先手胜"，其概率为 p_1^2，

"胜败胜"应为"先手胜，先手败，后手胜"，其概率为 $p_1(1-p_1)p_2$，

"败胜胜"应为"先手败，后手胜，先手胜"，其概率为 $(1-p_1)p_2p_1$，

故 $P(E)=p_1^2+p_1(1-p_1)p_2+(1-p_1)p_2p_1=p_1^2+2p_1p_2-2p_1^2p_2$，

同理，在事件 F 中，甲第一局执后手，所以"胜胜"具体来说应为"后手胜，先手胜"，其概率为 p_2p_1，

"胜败胜"应为"后手胜，先手败，后手胜"，其概率为 $p_2(1-p_1)p_2$，

"败胜胜"应为"后手败，后手胜，先手胜"，其概率为 $(1-p_2)p_2p_1$，

所以 $P(F)=p_2p_1+p_2(1-p_1)p_2+(1-p_2)p_2p_1=p_2^2+2p_1p_2-2p_1p_2^2$， 要比较 $P(E)$ 和 $P(F)$ 的大小，可作差来看，

$P(E)-P(F)=p_1^2+2p_1p_2-2p_1^2p_2-(p_2^2+2p_1p_2-2p_1p_2^2)=p_1^2-2p_1^2p_2-p_2^2+2p_1p_2^2$

$=(p_1+p_2)(p_1-p_2)-2p_1p_2(p_1-p_2)=(p_1-p_2)(p_1+p_2-2p_1p_2)=(p_1-p_2)[p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)]$，

因为 $0<p_1<p_2<1$，所以 $p_1-p_2<0$， $p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)>0$，

从而 $P(E)-P(F)=(p_1-p_2)[p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)]<0$，故 $P(E)<P(F)$.

12．（★★★）甲乙两人进行乒乓球比赛，约定每局胜者得 1 分，负者得 0 分，比赛进行到有一人比对方多 2 分或打满 6 局时停止. 设甲在每局中获胜的概率为 $\dfrac{2}{3}$，乙在每局中获胜的概率为 $\dfrac{1}{3}$，且各局胜负相互独立.

（1）求乙赢得比赛（不含平局）的概率；

（2）求比赛停止时已打局数 ξ 的数学期望.

解：（1）（要计算所求概率，需分析各场比赛的胜负情况，首先应考虑乙赢得比赛时共打了几局，故先分类）

乙赢得比赛有 3 种情形：2 局后赢得比赛，4 局后赢得比赛，6 局后赢得比赛，

若打完 2 局后，乙赢得比赛，其概率为 $p_1=(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{9}$；

若打完4局后，乙赢得比赛，则前2局乙1胜1负，第3，4局都获胜，其概率为 $p_2=C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times(1-\dfrac{1}{3})\times(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{4}{81}$；

若打完 6 局后，乙赢得比赛，则前 2 局乙必定 1 胜 1 负，第 3，4 局乙必定也是 1 胜 1 负，最后 2 局乙都

胜，其概率为 $p_3=C_2^1\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})\times(\frac{1}{3})^2=\frac{16}{729}$；

所以乙赢球的概率 $P=p_1+p_2+p_3=\frac{133}{729}$.

（2）由题意，ξ 可能的取值为 2，4，6，且 $P(\xi=2)=(\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3})^2=\frac{5}{9}$，

（对于 $\xi=4$ 的情形，应为前 2 局甲乙各胜 1 局，第 3，4 局甲连胜或乙连胜）

$P(\xi=4)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{3})\times[(\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2]=\frac{20}{81}$，

（对于 $\xi=6$ 的情形，应为第 1，2 局甲乙各胜 1 局，第 3，4 局甲乙各胜 1 局，第 5，6 局的胜负情况无需考虑，因为只要第 4 局没有决出胜负，一定会打 6 局结束）

$P(\xi=6)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{3})\times C_2^1\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{2}{3})=\frac{16}{81}$，

所以 ξ 的分布列为

ξ	2	4	6
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{16}{81}$

故 $E(\xi)=2\times\frac{5}{9}+4\times\frac{20}{81}+6\times\frac{16}{81}=\frac{266}{81}$.